

**Московский ордена Ленина
Государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет**

На правах рукописи

А. М. МОЛЧАНОВ

**Критерий дискретности спектра
дифференциального уравнения
второго порядка**

**Автореферат диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук**

**Научный руководитель—
доктор физико-математических наук,
проф. И. М. ГЕЛЬФАНД**

Москва—1951

В работе рассматриваются уравнения вида

$$-\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_n^2}\right) + q(x_1, \dots, x_n) \psi = \lambda \psi. \quad (1)$$

Уравнение задано во всем пространстве, а функция q предполагается ограниченной снизу.

Для таких уравнений найдены необходимые и достаточные условия дискретности спектра.

Эти условия формулируются особенно просто для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

Уравнение

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + q \psi = \lambda \psi \quad (2)$$

заданное на всей прямой $-\infty < x < +\infty$ имеет дискретный спектр в том и только в том случае, если

$$\int_N^{N+\delta} q(x) dx \rightarrow +\infty \quad (3)$$

при $N \rightarrow +\infty$ или $N \rightarrow -\infty$ и для любого фиксированного $\delta > 0$, функция q предполагается ограниченной снизу.

Уравнения в частных произвольных существенно отличаются, с точки зрения условий дискретности спектра, от обыкновенных уравнений.

Так же как и в одномерном случае, для недискретности спектра достаточно существования счетной последовательности одинаковых непересекающихся кубов D_m , таких что

$$\int_{D_m} q dv < K.$$

Но в отличие от одномерного, в „ n “-мерном случае можно на каждом D_m выделить такое множество F_m , что при произвольном изменении $q(x_1, \dots, x_n)$ на этих множествах спектр останется недискретным, а изменения q надлежащим образом можно добиться выполнения условия, аналогичного условию (3).

Множества F_m должны быть несущественными вырезами кубов D_m в следующем смысле:

Множество F , расположено в кубе D , называется несущественным вырезом этого куба, если емкость F достаточно мала по сравнению с емкостью D

$$C(F) \leq \frac{D^{n-2}}{(4\pi)^{4n}}.$$

Введение этого понятия позволяет сформулировать критерий дискретности спектра.

Для того чтобы уравнение (1) имело дискретный спектр, необходимо и достаточно, чтобы интеграл функции q по кубу D с любым несущественным вырезом F неограниченно возрастал, когда куб D , сохраняя размер, уходит на бесконечность, а вырез F как угодно изменяется.

$$\int_{D-F} q(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Методика исследования, развитая для уравнения (1), непосредственно переносится на уравнения типа

$$-\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_n^2}\right) = \lambda \psi \quad (5)$$

заданные в области G , с граничными условиями $\psi=0$ на границе области G .

В реферируемой работе найдены необходимые и достаточные условия дискретности спектра уравнения (5).

Так как, однако, формулировка сильно выигрывает в наглядности если говорить об условиях недискретности спектра, то здесь будут приведены именно эти условия:

Для того, чтобы уравнение (5) имело недискретный спектр, необходимо и достаточно, чтобы область G , в которой оно задано, содержала счетную последовательность одинаковых кубов с несущественными вырезами.

В двух важных частных случаях теорему можно усилить.

Если граница области G имеет ограниченную кривизну, то спектр уравнения (5) дискретен тогда и только тогда, когда область G содержит счетное число одинаковых непересекающихся кубов.

Эта теорема справедлива для пространства любого числа измерений.

Для плоскости возможно усиление основной теоремы в несколько ином направлении.

Если уравнение (5) задано в двумерной области G , дополнение к которой односвязно, то для дискретности

спектра необходимо и достаточно, чтобы область G содержала счетное число одинаковых непересекающихся квадратов.

В заключение в работе доказывается критерий дискретности спектра для разностного аналога дифференциального уравнения. В то время как обычно теоремы для разностных уравнений оказываются значительно сложнее соответствующих теорем для дифференциальных уравнений, критерий дискретности спектра разностного уравнения формулируется неожиданно просто:

Для того чтобы разностное уравнение:

$$\begin{aligned} - \sum_{k=1}^n [\psi(i_1, \dots, i_k + 1, \dots, i_n) - 2\psi(i_1, \dots, i_k, \dots, i_n) + \\ + \psi(i_1, \dots, i_k - 1, \dots, i_n)] + q(i_1, \dots, i_n) \psi(i_1, \dots, i_n) = \\ = \lambda \psi(i_1, \dots, i_n) \end{aligned}$$

имело дискретный спектр, необходимо и достаточно,
чтобы

$$q(i_1, \dots, i_n) \rightarrow +\infty$$

когда

$$|i_1| + \dots + |i_n| \rightarrow +\infty.$$

Этот результат наиболее отчетливо вскрывает основную причину дискретности спектра, — причину, которая в дифференциальных уравнениях маскируется тонкостями поведения коэффициента $q(x_1, \dots, x_n)$ на несущественных множествах.

Автор считает своим долгом принести глубокую благодарность проф. И. М. Гельфанду за руководство работой.